今更ながらモンテカルロ法　１次元から４次元球まで

モデル化とシミュレーション授業実践から思考力の育成を目指して

千葉県立船橋東高等学校　泉水　清和

「情報の科学」の授業で実践したモンテカルロ法を紹介する。「問題解決」を扱うにあたりモデル化とシミュレーションは限られた授業時間の中で扱いの軽重が難しい分野である。ここでは、モンテカルロ法に焦点をあて、１次元での平方根、２次元での面積、３次元での体積を例に学ぶ。基本を学び、そこから応用するときの考え方を広げる思考方法に重点を置き学習させる。モンテカルロ法は４次元・ｎ次元にも拡張できることを学び、知識・技能の習得のみならず思考力の育成を目指す。

1.　モンテカルロ法の基本（円の面積・円周率）

ここでは、多くの教科書にあるように円の面積を求めることにより円周率を求める。楕円等にも触れその応用について学ぶ。

1.1　教科書等によくあるパターン

ｘｙ座標上の１×１平面上で 1/4 円の面積から円周率を求める。

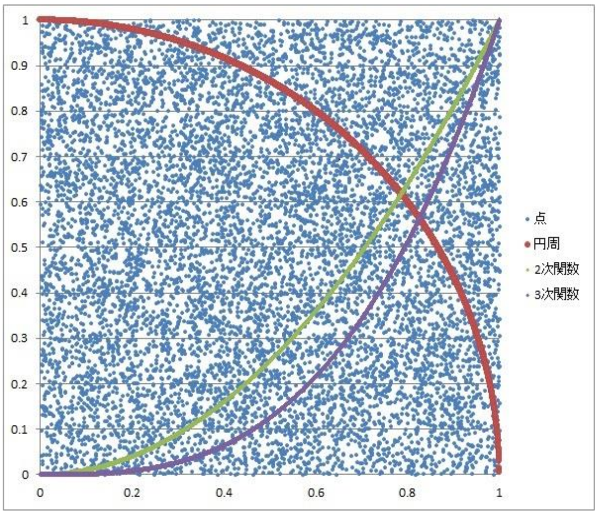


図1　円周と2次・3次関数

1.2　設問：２次関数や３次関数で囲まれた面積を求めるにはどうすれば良いか。

1.3　表計算ソフトを用いて２次関数や３次関数で囲まれた面積を求めることができる。

式：$y = x^2$を用いて求める。

式：$y = x^3$を用いて求める。

ｎ次関数でも用いることができることに触れる。

1.4　演習：全円の面積を求める。

表計算ソフトを用いて半径３の全円の面積を求める。ｘｙ座標上の－３～３平面上でランダムに点を打ち円の面積を求める。

式：$x^2 + y^2 = 3^2$を用いて求める。

1.5　演習：楕円の面積を求める。

表計算ソフトを用いて長径３短径２の楕円の面積を求める。楕円の境界線を表す式

$(x/3)^2 + (y/2)^2 = 1$を用いて求める。

楕円の境界線$(x/a)^2+(y/b)^2=1$　　面積 $ab\pi$

境界線を式で表すことができれば面積を求められることを確認する。

2.　１次元で平方根を求める。

線分上にランダムに点を打つことと三平方の定理から平方根が求められることを確認する。

ｘｙ平面の線分上に点を打ち

$x^2 + y^2 \leqq 1$を満たす点を線分の長さ１とする。

$x^2 + y^2 \leqq r^2$を満たす点を線分の長さｒとする。

$r = \sqrt{n}$とすることで任意の平方根を求められる。

2.1　$\sqrt{2}$を求める。

$y = x$の線分上に$x = 0$～２の区間でランダムに点を打つ。

$\sqrt{2}$＝（$x^2 + y^2 \leqq 2$を満たす点の数）

÷（$x^2 + y^2 \leqq 1$を満たす点の数）で求める。

2.2　$\sqrt{3}$を求める。

$y = x$の線分上に$x = 0$～２の区間でランダムに点を打つ。

$\sqrt{3}$＝（$x^2 + y^2 \leqq 3$を満たす点の数）

÷（$x^2 + y^2 \leqq 1$を満たす点の数）で求める。

2.3　$\sqrt{n}$を求める方法を考えさせる。例：$\sqrt{7}$。

ｙ＝ｘの線分上にｘ＝０～１０の区間でランダムに点を打つ。$\sqrt{14}$までは求められる。

$\sqrt{n}$＝（$x^2+y^2 \leqq n$を満たす点の数）

÷（$x^2+y^2 \leqq 1$を満たす点の数）で求める。

例：ｎ＝７とすれば、$\sqrt{7}$を求めることができる。

追加の指導（生徒が気づけば一番良い） 実は、どんな線分上でも良いことに気づかせる。 ｙ＝０上で行えば、三平方の定理は必要なく $x^2=n$で平方根、$x^3=n$で立方根、$x^m=n$でｍ乗根を求めることができる。

3.　３次元で体積を求める。

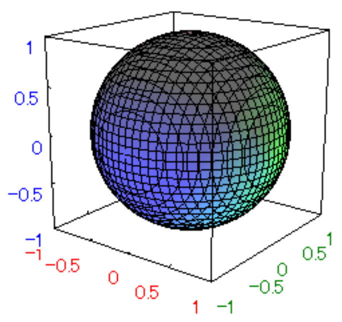
以上２次元での学習を踏まえ３次元の体積に拡張する。**同じように境界面を数式で表すことができれば体積を求められることを確認する。**

3.1　例：半径ｒの球

原点を中心とした３次元球の球面の公式

$x^2+y^2+z^2=r^2$ から表計算ソフトを用いて球の体積を求める。

球の体積の公式から計算した値と比較してみる。



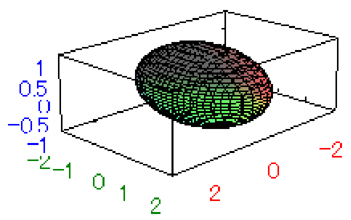
3.2　応用問題　楕円体の体積

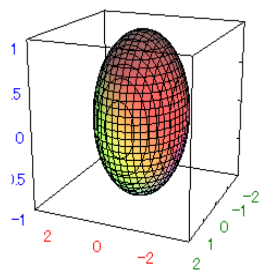
原点を中心とした３次元楕円体の楕円面の公式

$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$（主軸の長さ＝2a,2b,2c）から表計算ソフトを用いて楕円体の体積を求める。

楕円体の体積の公式から計算した値と比較する。

体積 $V=4\pi abc/3$





4.　４次元・ｎ次元で体積を求める。

４次元・ｎ次元の物体（架空の物体）に対してもモンテカルロ法を拡張できることに触れる。数学的には高校での内容を超えるが、表計算ソフトを用いれば高校１年生までの学習内容でも求める方法があることを学び、思考力の育成を目指す。

4.1　４次元球と４次元楕円体

原点を中心とした４次元球の球面の公式

$x^2+y^2+z^2+w^2=r^2$から表計算ソフトを用いて４次元球の（超？）体積を求める。

４次元球の超体積の公式から計算した値と比較してみる。４次元球の超体積＝$\pi^2 r^4/2$

応用問題（提示のみ）：４次元楕円体の球面の公式

$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2+w^2/d^2=1$　（主軸の長さ＝2a,2b,2c,2d）から４次元楕円体の超体積を求めることもできる。

4.2　ｎ次元球

４次元の場合の応用で５次元・６次元と拡張できることに触れる。（実際の授業ではやらない）

例えば表計算ソフトとモンテカルロ法を用いれば高校１年生までの学習内容でも 10 次元球の体積を近似的に求めることもできる。

偶数次元ならば、半径ｒのｎ次元球の超体積Ｖは、以下の式で与えられるので近似値と比較できる。

超体積　$V=\pi^n r^{2n}/n!$

終わりに

実際の授業の中でここまで指導する時間も必要性もないと思うが、俗に言う「引き出しは多くあった方が良い」と思う。モデル化とシミュレーションの指導の一助となれば幸いと考える。深く生徒がじっくりと時間をかけて取り組むことも、時には必要なことではないかと考える。

参考文献

(1)　最新「情報の科学」実教出版
　　岡本敏雄　山極　隆

引用・参考サイト

(2)　参考 URL：数学特論Ⅱ～４次元球の体積は？～ http://my.reset.jp/~gok/math/pdf/spm/sphere.pdf

(3)　参考 URL：ke!san 生活や実務に役立つサイト http://keisan.casio.jp/

(4)　参考 URL：受験数学かずスクール（ブログ） http://kazuschool.blog94.fc2.com/blog-entry-76.html