

理科・数学・情報の 関連性を意識した授業展開

最小二乗法による データ処理を例として

東京都立日比谷高等学校

天良和男

統計にやっと光が！

- 新学習指導要領の数学Ⅰ
「データの分析」が登場
- 新科目「社会と情報」、「情報の科学」
問題解決における統計的手法を活用した指導

教科横断的な授業の展開

以下の内容を2時間の情報の時間で行う

- **理科の内容** (理科の学習内容を問題解決の題材)
物体の落下運動をデジタルカメラで撮影
速度と時間の関係のグラフにおいて直線の傾きから
重力加速度を求める
- **数学の内容**
最小二乗法による回帰直線の傾きの値
従来は偏微分方程式を用いて誘導→高校では無理
数学 I の範囲の二次関数の最小値として誘導
- **情報の内容**
表計算ソフトを用いて
速度と時間のデータより、重力加速度を求める

理科の内容

- 物体の落下運動をデジタルカメラで撮影
- 速度と時間の関係のグラフにおいて直線の傾きから重力加速度を求める

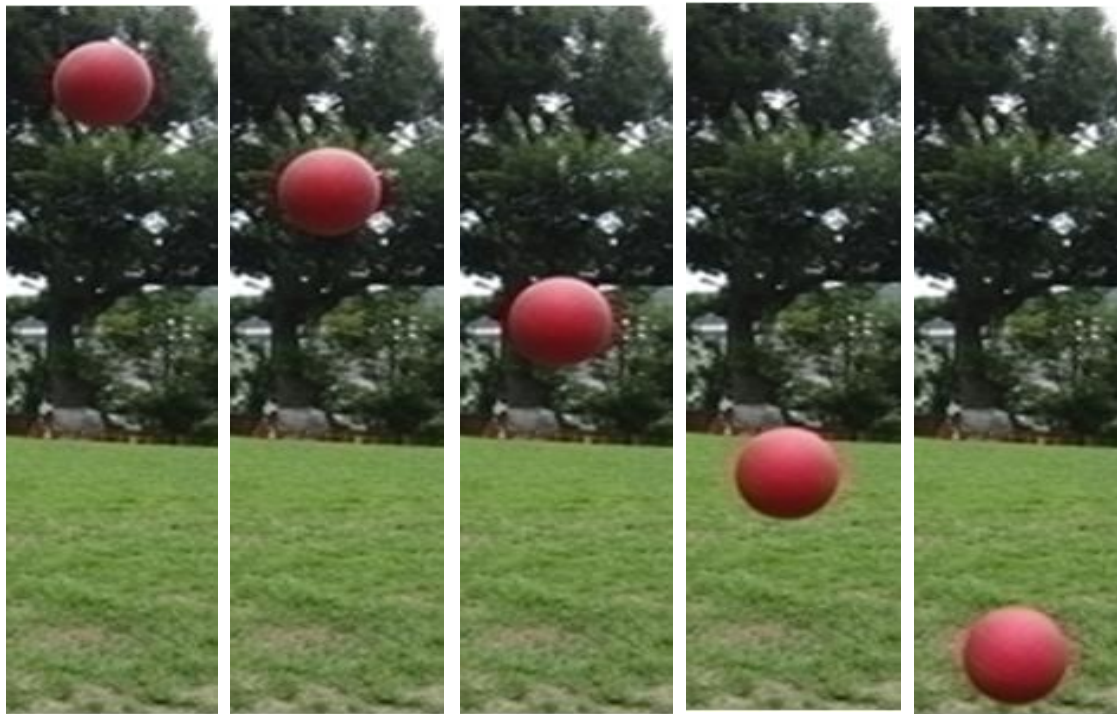
物体の落下運動



落下する物体をデジタルカメラで撮影し、その画像から重力加速度を求めることができる

物体の落下運動の実験

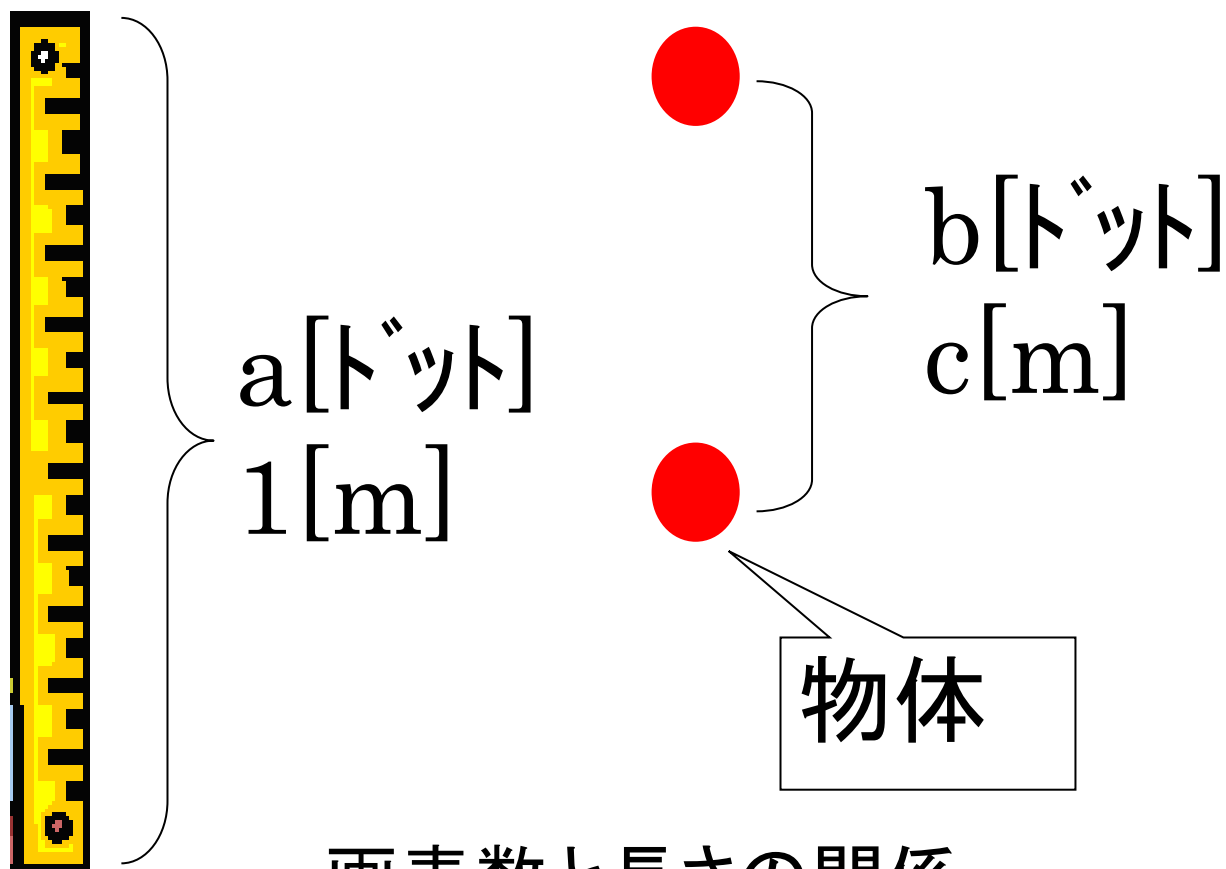
高速度撮影ができる安価なデジタルカメラを用い物体の落下運動を1/30秒毎の複数の静止画像として撮影



落下運動の画像

画素数と落下距離の関係

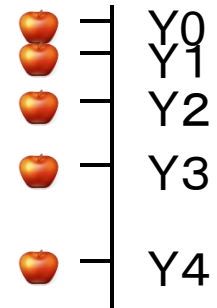
$$a:1 = b:c \quad \text{よって, } c = b / a$$



画素数と長さの関係

重力加速度の測定

- 1/30秒ごとの落下する物体のY座標を測定し, その座標をY0, Y1, Y2, Y3, Y4 - - - とする



- 各区間の平均速度をv1, v2, v3, v4 - - - とする

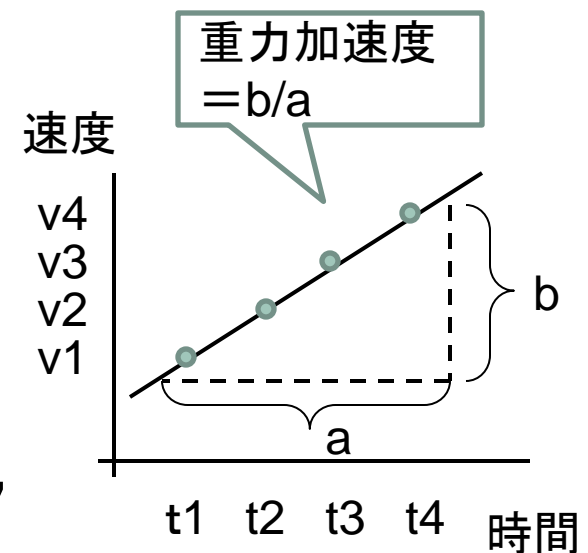
$$v1=(Y1-Y0)/(1/30)$$

$$v2=(Y2-Y1)/(1/30)$$

$$v3=(Y3-Y2)/(1/30)$$

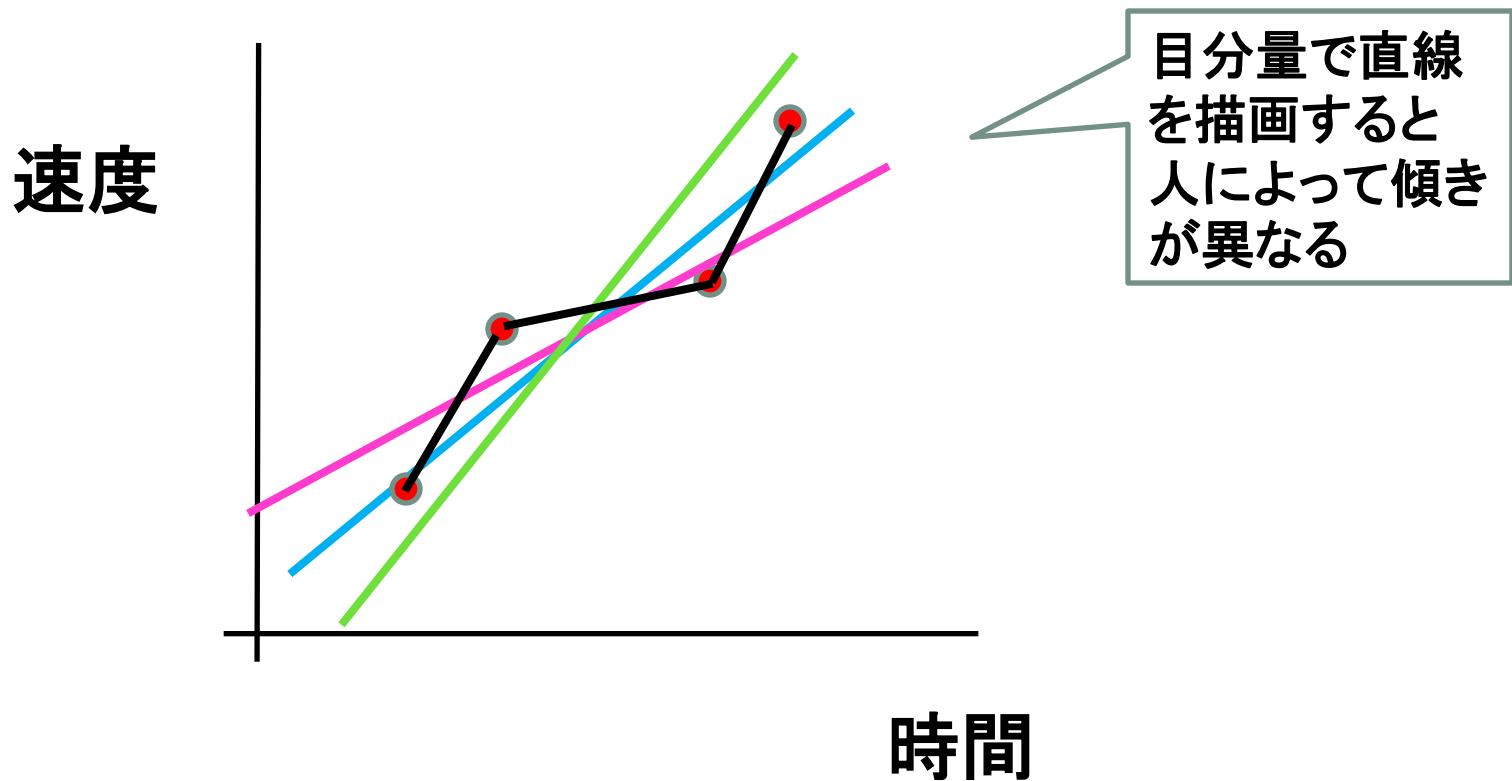
$$v4=(Y4-Y3)/(1/30)$$

- 速度と時間(v-tグラフ)の傾きから, 重力加速度を求める



直線の傾き

直線の傾き = 重力加速度



従来の物理の授業では

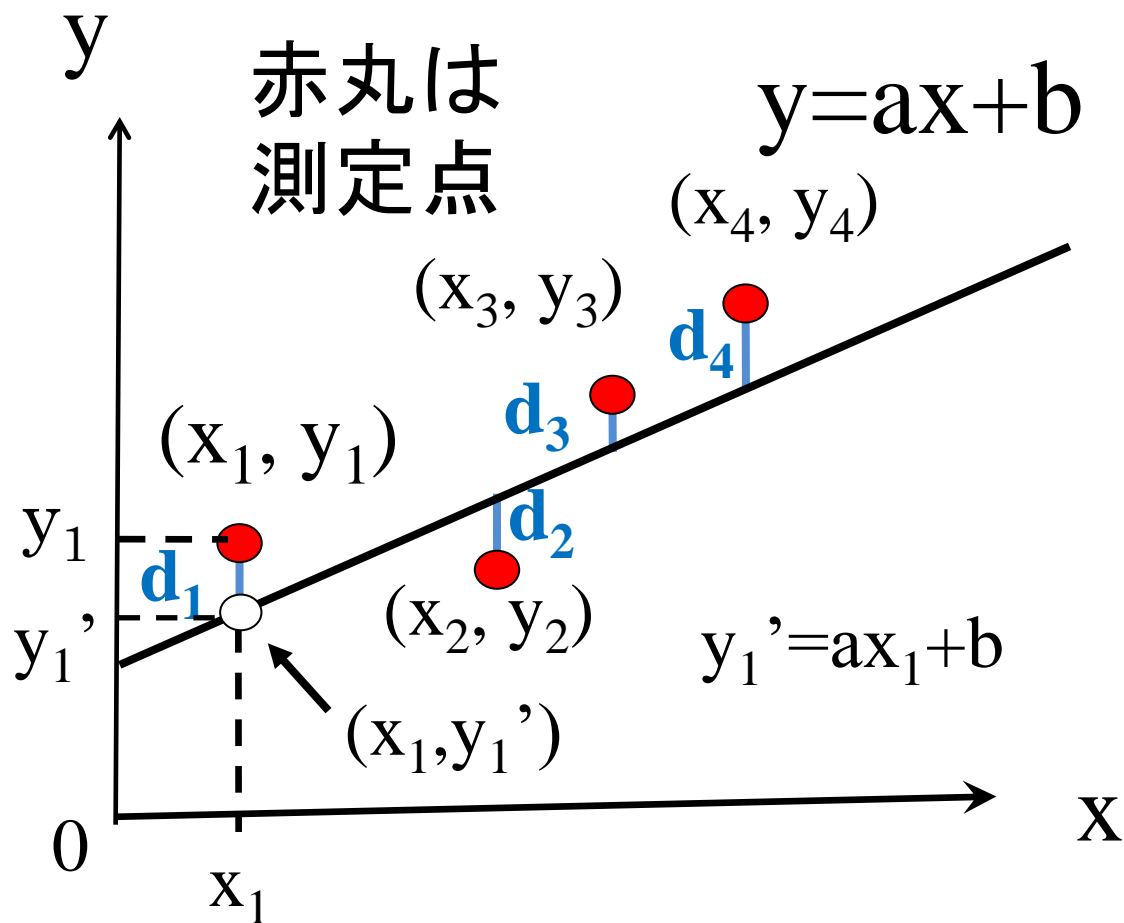
- 直線を目分量で描画させる場合
方眼紙と定規を用いる
人によるバラツキにより, 正確な重力加速度が得られない
- 表計算ソフトを用いて描画させる場合
近似直線の描画機能を用いる
正確な重力加速度が得られるが, 理論の説明を行わないのでブラックボックスになってしまう
理論の説明は統計や偏微分方程式の知識が必要

数学の内容

- 直線を目分量ではなく、最小二乗法による回帰直線で描画する
- 従来、回帰直線の傾きの理論的説明は統計や偏微分方程式の知識が必要であった
- 新課程 数学 I に統計の項目が登場
- 偏微分方程式を使わずに、数学 I の範囲で説明

回帰直線の傾きの誘導方法

偏微分方程式を使う方法(従来の方法)



$$d_1 = y_1 - y_1' \\ = y_1 - ax_1 - b$$

$$d_2 = y_2 - ax_2 - b$$

$$d_3 = y_3 - ax_3 - b$$

$$d_4 = y_4 - ax_4 - b$$

距離の二乗の和S

$$\begin{aligned} S &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \\ &= A + a^2 B + 4b^2 - 2bC - 2aD + 2abE \end{aligned}$$

A, B, C, Dは定数

$$A = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$

$$B = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$C = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$D = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

$$E = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

距離の二乗の和S

bを固定すればaの二次関数となり、
 $B > 0$ であるから最小値が存在する

$$S(a) = Ba^2 + 2(bE - D)a + A + 4b^2 - 2bC \quad \textcircled{1}$$

aを固定すればbの二次関数となり、最小
値が存在する

$$S(b) = 4b^2 + 2(aE - C)b + A + a^2B - 2aD \quad \textcircled{2}$$

Sが最小になるときのaとbの値

Sが最小になるときのaとbの値を求めるために偏微分して0とおく.

$$\textcircled{1} \text{より, } \frac{\partial S}{\partial a} = 2aB - 2D + 2bE = 0$$

(ア)

$$\textcircled{2} \text{より, } \frac{\partial S}{\partial b} = 4 \times 2b - 2C + 2aE = 0$$

$$\text{ゆえに, } aB - D + bE = 0 \quad \textcircled{3} \quad aE - C + 4b = 0 \quad \textcircled{4}$$

$$a = \frac{4D - CE}{4B - E^2} \quad \textcircled{5}$$

$$b = \frac{BC - DE}{4B - E^2} \quad \textcircled{6}$$

回帰直線の傾きの誘導方法

二次関数の最小値による方法

(授業で行った方法)

「偏微分方程式を使う方法」の説明(ア)の部分を次の説明(イ)に置き換えるだけで、高校生にも式⑤と⑥の誘導を説明できる。

式①を変形すると,

$$S(a) = B \left(a - \frac{D-bE}{B} \right)^2 + \text{最小値}$$

$S(a)$ が最小になるときの a の値は,

(イ)

$$a = \frac{D-bE}{B} \text{ となるから, } aB - D + bE = 0 \quad \textcircled{3}$$

式②を変形すると,

$$S(b) = 4 \left(b - \frac{C-aE}{4} \right)^2 + \text{最小値}$$

$S(b)$ が最小になるときの b の値は,

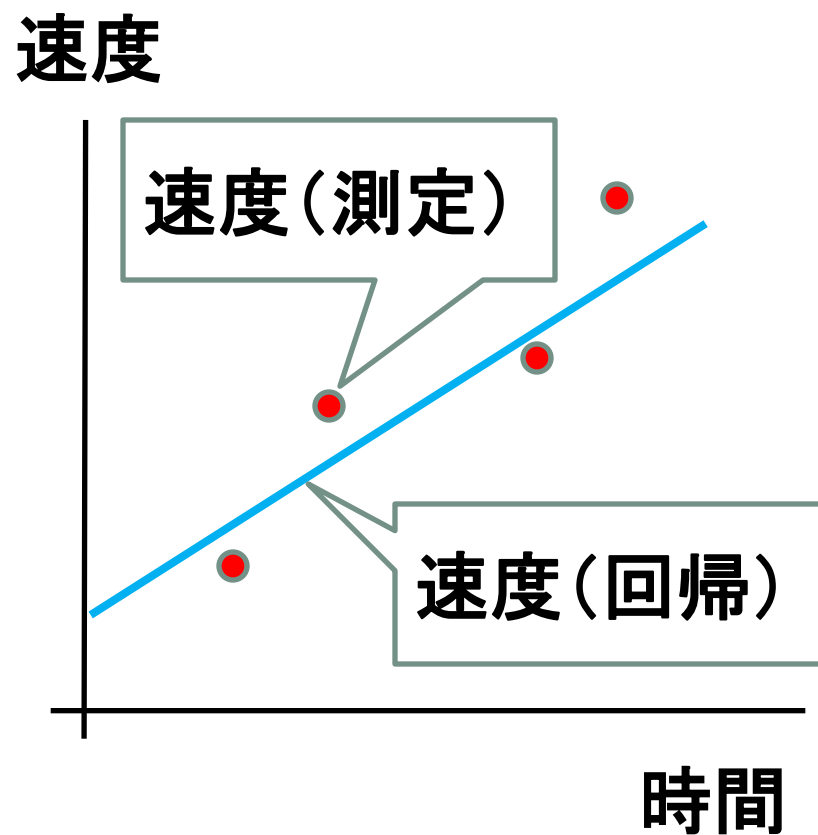
$$b = \frac{C-aE}{4} \quad \text{となるから, } aE-C+4b=0 \quad \textcircled{4}$$

(イ)

情報の内容

- 表計算ソフトを用いて
速度と時間のデータより, 重力加速度を求める
- ① 表計算ソフトの近似直線を描画する機能を用いて重力加速度を求める
→ 時間がかからないがブラックボックスになる
- ② 回帰直線の傾きの式から重力加速度を求める
→ 時間がかかるがブラックボックスにはならない

データ



表計算ソフトを用いたデータ処理

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			x	y	Y		yy	xy	xx
3			0		0.54357				
4			0.01667	0.74689	0.70539		0.5578	0.0124	0.0003
5			0.05000	0.99585	1.02905		0.9917	0.0498	0.0025
6			0.08333	1.36929	1.35270		1.8750	0.1141	0.0069
7			0.11667	1.61826	1.67635		2.6188	0.1888	0.0136
8			0.15000	1.99170	2.00000		3.9669	0.2988	0.0225
9			0.18333	2.36515	2.32365		5.5939	0.4336	0.0336
10			0.2		2.48548				
11		Σ	0.60000	9.08714			15.604	1.0975	0.0794
12		n	6						
13		a	9.70954						
14		b	0.54357						

$$A = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$

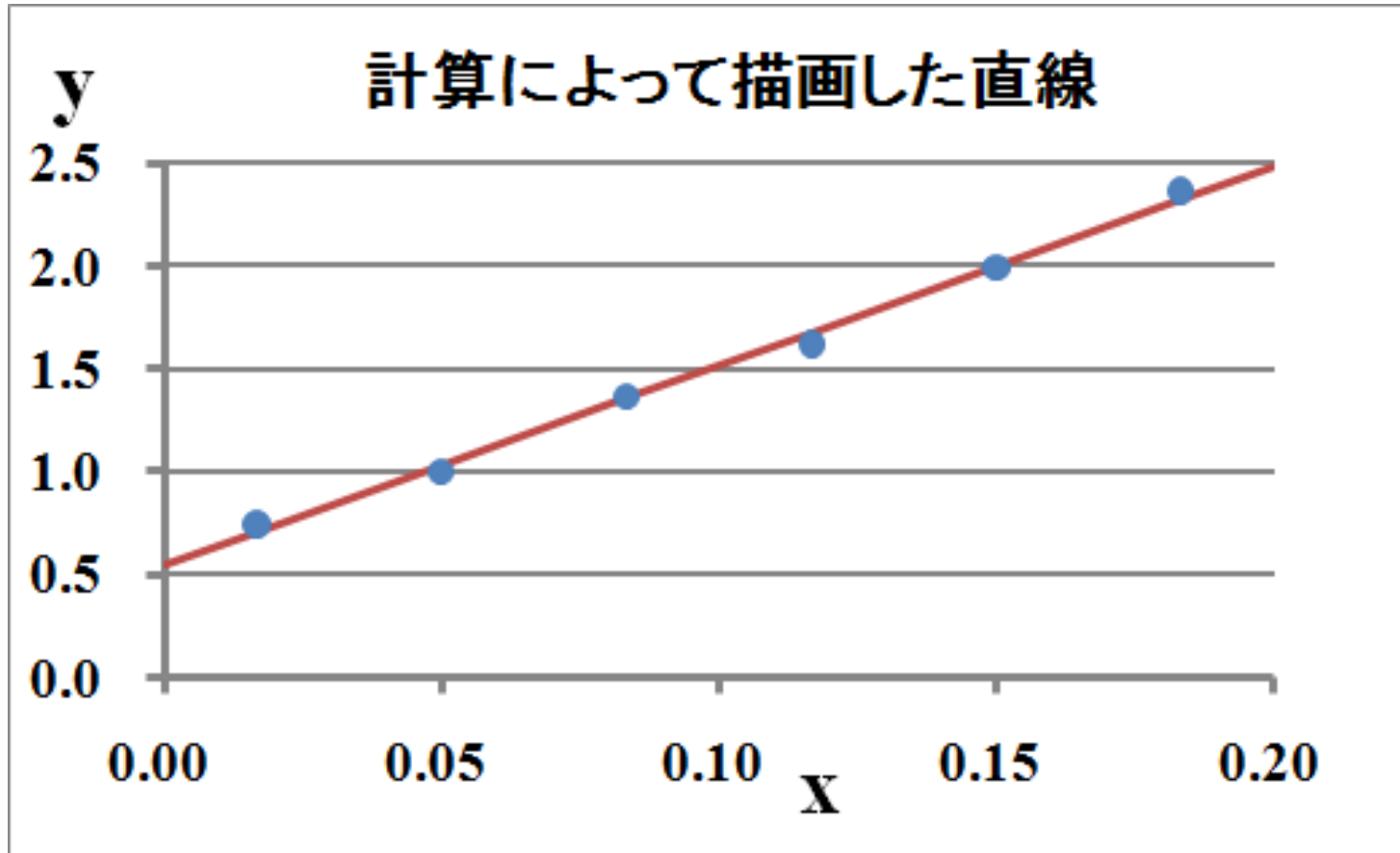
$$B = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$C = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$D = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

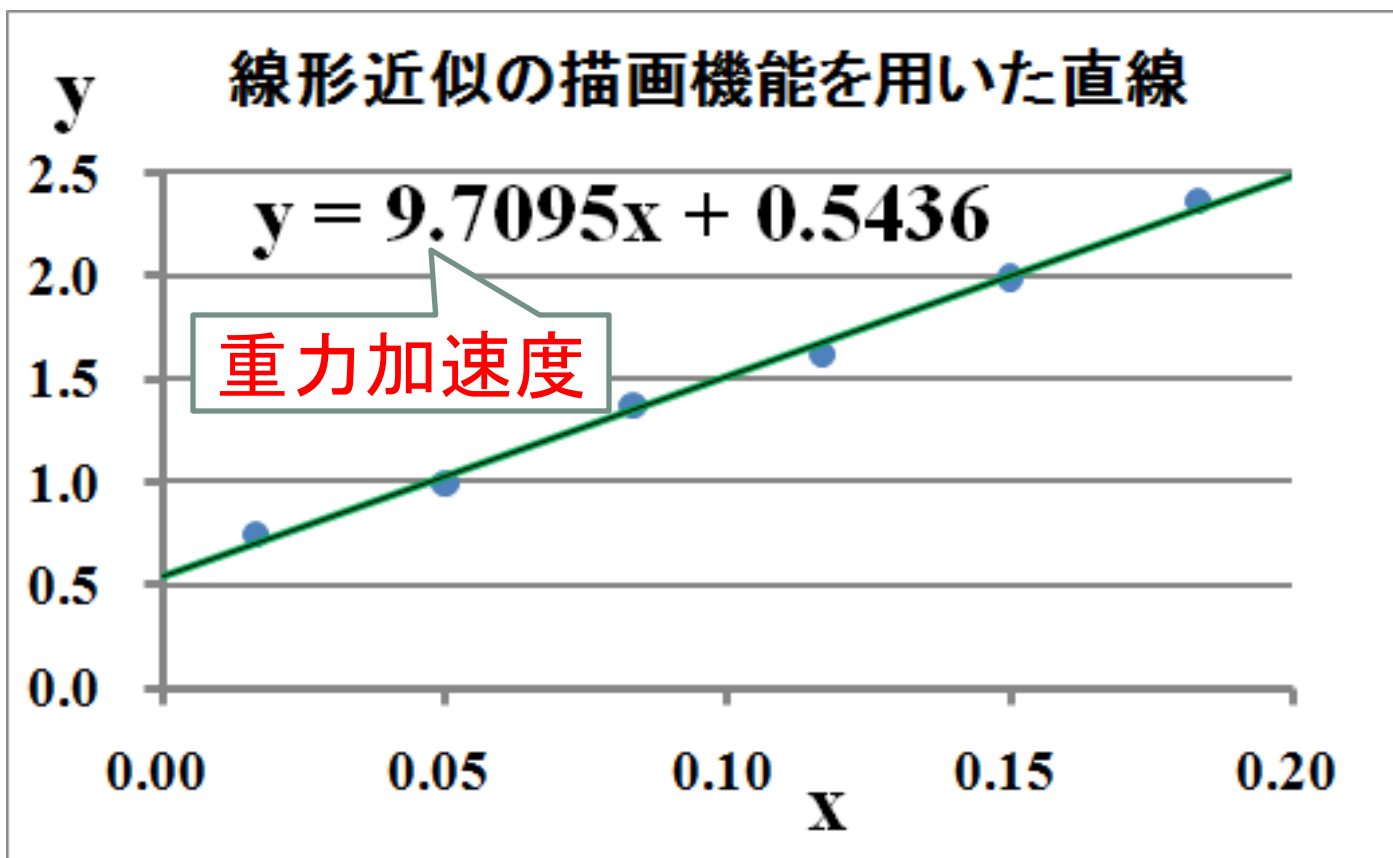
$$E = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

計算によって描画した直線



計算から描画した直線

線形近似の描画機能を用いた直線



Excelの線形近似の描画機能を用いた直線

評価

- 生徒からは
情報が様々な教科と関連していることがわかった
- 数学科の教員からは
最小二乗法の理論は高校数学では無理だ
とっていたが指導できることがわかった
- 理科の教員からは
今まで直線を目分量で引かせていたため
、バラツキがあったが、最小二乗法を用い
て指導できることがわかった

おわりに

- 統計的手法による問題解決が可能になった
- 情報が中心になって教科横断的な授業を展開することができる